TUHH
Technische Universität Hamburg-Harburg

Fachliche Grundlagen

Transportgleichung und Analytische Lösung nach van Genuchten & Alves
Quelltyp A, Quelltyp B

Schulung ALTEX-1D Version 3
Februar 2019

Quelltyp A und Quelltyp B

Für beide Quelltypen gilt die selbe prozessbeschreibende Stofftransportgleichung.

Der Unterschied in der Lösung der Gleichung ergibt sich aus der oberen Randbedingung (Quelltyp A bzw. B)

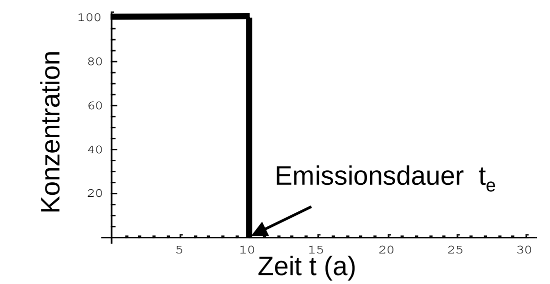
(Im Folgenden werden die originalen Parameterbezeichnungen verwendet)

$$R\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v\frac{\partial c}{\partial x} - \mu c + \gamma$$

Sorption **Diffusion / Dispersion** **Advektion** **Abbau**

R	[-]	Retardationsfaktor ($R=1+\rho k/\theta$)
t	[a]	Zeit
c	[mg/L]	Schadstoffkonzentration
D	[m^2/a]	Hydrodynamischer Dispersionskoeffizient
v	[m/a]	Sickerwassergeschwindigkeit
μ	[1/a]	Koeffizient der Abbaurate 1. Ordnung
γ	[mg/(L·a)]	Koeffizient der Produktionsrate 0. Ordnung

Quelltyp A



Anfangs- und Randbedingungen

$$c(x,0) = c_i$$

$$-D\frac{\partial c}{\partial x} + v\,c\bigg|_{x=0} = \begin{cases} v c_0 & 0 < t \leq t_e \\ 0 & t > t_e \end{cases}$$

oben: 3. Art

$$\frac{\partial c}{\partial x}(\infty, t) = 0$$

unten: halbunendlich

c_i	[mg/L]	Anfangskonzentration in der Sickerwasserzone
c_0	[mg/L]	Quellkonzentration
t_e	[a]	Emissionsdauer an der Unterseite der Schadensquelle
x	[m]	Vertikale Koordinate mit x = 0 an der Unterkante der Schadensquelle
v	[m/s]	Abstandsgeschwindigkeit
D	[m^2/s]	Hydrodynamischer Dispersionskoeffizient

Van Genuchten & Alves Lösung: Quelltyp A ; Teil 1/2

Technische Universität Hamburg-Harburg

Case C 6

$$c(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\gamma}{\mu}+(c_i-\dfrac{\gamma}{\mu})\underline{A(x,t)}+(c_0-\dfrac{\gamma}{\mu})\,\underline{B(x,t)}; \\ 0<t\le t_e \\ \\ \dfrac{\gamma}{\mu}+(c_i-\dfrac{\gamma}{\mu})\underline{A(x,t)}+(c_0-\dfrac{\gamma}{\mu})\underline{B(x,t)}-c_0\,\underline{B(x,t-t_e)}; \\ t>t_e\end{cases}$$

VAN GENUCHTEN & ALVES (1982): Analytical solutions of the one-dimensional convective-dispersive solute transport equation.- US. Department of Agriculture, Technical Bulletin No. 1661; 151 p.

Anmerkungen: 1) In ALTEX 1-D ist der Koeffizient der Stoffproduktion **γ = 0**

2) **rot unterstrichene Funktion** siehe nächste Seite

Van Genuchten & Alves Lösung: Quelltyp A; Teil 2/2

Technische Universität Hamburg-Harburg

mit

$$A(x,t) = exp\left(\frac{-\mu t}{R}\right)\left\{\begin{aligned}&1 - \frac{1}{2} erfc\left[\frac{Rx - vt}{2\sqrt{DRt}}\right] - \left(\frac{v^2 t}{\pi DR}\right)^{\frac{1}{2}} exp\left[-\frac{(Rx - vt)^2}{4DRt}\right]\\ &+\frac{1}{2}\left(1 + \frac{vx}{D} + \frac{v^2 t}{DR}\right) exp\left(\frac{vx}{D}\right) erfc\left[\frac{Rx + vt}{2\sqrt{(DRt)}}\right]\end{aligned}\right\}$$

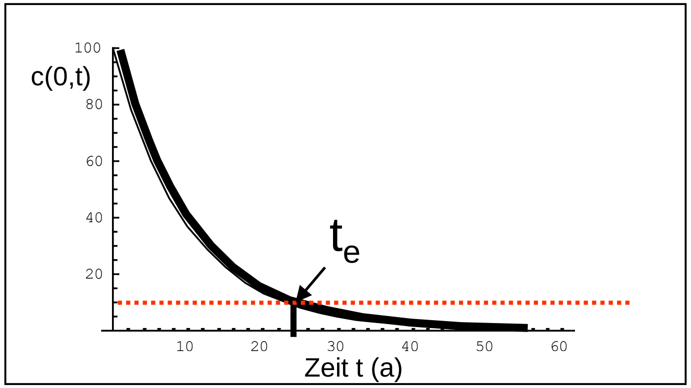
$$B(x,t) = \frac{v}{(v+u)} exp\left[\frac{(v-u)x}{2D}\right] erfc\left[\frac{Rx - ut}{2\sqrt{(DRt)}}\right]$$

$$+\frac{v}{(v-u)} exp\left[\frac{(v+u)x}{2D}\right] erfc\left[\frac{Rx+ut}{2\sqrt{(DRt)}}\right] + \frac{v^2}{2\mu D} exp\left[\frac{vx}{D} - \frac{\mu t}{R}\right] erfc\left[\frac{Rx+vt}{2\sqrt{(DRt)}}\right]$$

und die Substitution *u*

$$u = v \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{4\mu D}{v^2}\right)}$$

Quelltyp B



TUHH
Technische Universität Hamburg-Harburg

Anfangs- und Randbedingungen

$$c(x,0) = c_i$$

Anmerkung: In ALTEX ist der Endwert der Quellkonzentration $c_a = 0$ (für $t \to \infty$)

$$-D\frac{\partial c}{\partial x} + vc\Big|_{x=0} = v\left(c_a + c_B e^{-\lambda \cdot t}\right)$$

oben: 3. Art

$$\frac{\partial c}{\partial x}(\infty, t) = 0$$

unten: halbunendlich

c_B	[µg/L]	Anfangswert der Quellkonzentration (für $t = 0$)
c_a	[µg/L]	Endwert der Quellkonzentration (für große t)
λ	[1/a]	Abklingkonstante der Quellkonzentration

Van Genuchten & Alves Lösung: Quelltyp B ; Teil 1/2

Technische Universität Hamburg-Harburg

Case C 14

$$c(x,t) = \frac{\gamma}{\mu} + \left(c_i - \frac{\gamma}{\mu}\right) A(x,t) + \left(c_a - \frac{\gamma}{\mu}\right) B(x,t) + c_0 E(x,t) \qquad \mu \neq \lambda R$$

$$c(x,t) = \frac{\gamma}{\mu} + \left(c_i - c_0 - \frac{\gamma}{\mu}\right) A(x,t) + \left(c_a - \frac{\gamma}{\mu}\right) B(x,t) + c_0 e^{-\lambda t} \qquad \mu = \lambda R$$

Anmerkung:

In ALTEX 1-D sind Endkonzentration in Quelle $c_a = 0$ und

Koeffizient der Stoffproduktion 0.Ordnung $\gamma = 0$

⇒ 1. und 3. Summand entfallen

VAN GENUCHTEN & ALVES (1982): Analytical solutions of the one-dimensional convective-dispersive solute transport equation.- US. Department of Agriculture, Technical Bulletin No. 1661; 151 p.

Van Genuchten & Alves Lösung: Quelltyp B ; Teil 2/2

TUHH
Technische Universität Hamburg-Harburg

mit

$$A(x,t) = exp\left(\frac{-\mu t}{R}\right)\left\{\begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2} erfc\left[\frac{Rx - vt}{2\sqrt{DRt}}\right] - \left(\frac{v^2 t}{\pi DR}\right)^{\frac{1}{2}} exp\left[-\frac{(Rx - vt)^2}{4DRt}\right] \\ +\frac{1}{2}\left(1 + \frac{vx}{D} + \frac{v^2 t}{DR}\right) exp\left(\frac{vx}{D}\right) erfc\left[\frac{Rx + vt}{2\sqrt{(DRt)}}\right] \end{array}\right\}$$

$$E(x,t) = e^{-\lambda t}\left\{\left(\frac{v}{v+w}\right) exp\left[\frac{(v-w)x}{2D}\right] erfc\left[\frac{Rx - wt}{2\sqrt{DRt}}\right] + \left(\frac{v}{v-w}\right) exp\left[\frac{(v+w)x}{2D}\right] erfc\left[\frac{Rx + wt}{2\sqrt{DRt}}\right]\right\}$$

$$+\frac{v^2}{2D(\mu - \lambda R)} exp\left(\frac{vx}{D} - \frac{\mu t}{R}\right) erfc\left[\frac{Rx + vt}{2\sqrt{DRt}}\right]$$

und *w*

$$w = v \cdot \sqrt{\left[1 + \frac{4D}{v^2}(\mu - \lambda R)\right]}$$